

АЕРОКОСМІЧНІ СИСТЕМИ МОНІТОРИНГУ ТА КЕРУВАННЯ

УДК 621.396:351.814

¹В.П. Бабак, д-р техн. наук
²В.П. Харченко, д-р техн. наук
³Є.А. Знаковська

ДОСЛІДЖЕННЯ ЙМОВІРНОСТІ КАТАСТРОФІЧНОЇ СИТУАЦІЇ МЕТОДОМ МОДЕЛЮВАННЯ РІДКІСНИХ ПОДІЙ ЗА ОПТИМАЛЬНОЮ ВИБІРКОЮ

Інститут інформаційно-діагностичних систем НАУ,

e-mail: ¹bvp@nau.edu.ua; ²kharch@nau.edu.ua; ³znakovskaya@bk.ru

Досліджено ймовірність катастрофи, оціненої за методом моделювання рідкісних подій при оптимальній допоміжній вибірці шляхом змінювання вихідних параметрів розподілу.

Вступ

Ситуації в аеронавігаційній системі (АНС) формуються внаслідок прямих впливів на її підсистеми й умови їхнього функціонування. На основі структури і зв'язків АНС можна визначити ці впливи за окремими підсистемами, що характеризуються внутрішніми властивостями системи “екіпаж – повітряний корабель – оточуюче середовище”, пов'язаними з функціональною ефективністю системи управління. Зокрема – ефективністю контуру системи організації повітряного руху (АТМ) і ефективністю систем зв'язку, навігації, спостереження, а також рівнем впливів позасистемних факторів (зовнішніх умов); параметрами руху і положення повітряного корабля в просторі, а також рядом системних обмежень.

У процесі експлуатації мають місце ті або інші відхилення від оптимальних значень параметрів системи, що і призводить до появи спектра ситуацій. Причому ускладнення визначається послідовністю подій. Попередня подія відносно наступної, нею викликаной, розглядається як причина. У процесі розвитку негативного явища в загальному випадку можуть мати місце кілька чинників, що послідовно ускладнюють ситуацію й у підсумку призводять до авіаційного інциденту.

Точна оцінка ймовірностей небезпечних ситуацій є важливою задачею, розв'язання якої дозволить вчасно провести маневри і запобігти зіткненню.

Найбільш складною є задача моделювання і оцінки ймовірності катастрофічної ситуації, зважаючи на її малу величину.

З метою оцінки ймовірності катастрофи проведемо моделювання рідкісної події, тобто зіткнення двох літаків. У праці [1] для цього викори-

стовувалася методика істотних вибірок при невідомому об'ємі допоміжної вибірки.

Дослідимо поведінку ймовірності катастрофічної ситуації при оптимальній допоміжній вибірці n і змінюванні вихідних параметрів.

Постановка завдання та математична модель

Розглянемо пару конфліктуючих літаків, що летять паралельними повітряними коридорами. Необхідно знати їх поточні координати x (це може бути або висотна, або поперечна координата). Припускаємо, що координата x літаків має випадковий розподіл із щільністю ймовірності змішаного типу [2]:

$$f(x; \mu) = \frac{(1-\alpha)e^{-\left|\frac{x-\mu}{a_1}\right|^{1/b_1}}}{2a_1b_1\Gamma(b_1)} + \frac{\alpha e^{-\left|\frac{x-\mu}{a_2}\right|^{1/b_2}}}{2a_2b_2\Gamma(b_2)}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

У виразі (1) функція

$$\Gamma(t) = \int_0^{\infty} x^{t-1} e^{-x} dx, \quad t > 0$$

є гамма-функцією, змінювані параметри $\alpha \in (0,1)$, a_1 і a_2 – позитивні параметри масштабу, b_1 і b_2 – позитивні параметри форми, $\mu \in \mathbb{R}$ – параметр місцеположення, що відповідає осі повітряного коридору.

Щільність ймовірності форми (1) називається щільністю подвійного узагальненого розподілу Лапласа. Це використовується для моделювання випадкового ризику літака за моделлю Рейха.

Перший доданок правої частини виразу (1) відповідає ядру розподілу, у той час як другий доданок – рідкісним подіям, коли літак занадто далеко відхиляється від осі коридору. Відповідні щільності ймовірності $f(x_1; \mu_1)$ і $f(x_2; \mu_2)$

мають різні параметри місцеположення μ_1 й μ_2 , а X_j – поточною координатою x j -го літака, $j=1, 2$, і X – складеним вектором координат (x_1, x_2) .

Зіткнення по координаті x виникають, якщо

$$|X_1 - X_2| \leq d,$$

де d – ефективний діаметр літака.

Проблема полягає в тому, щоб оцінити ймовірність P_x зіткнення по координаті x :

$$P_x = P\{|X_1 - X_2| \leq d\} = \iint_{|x_1 - x_2| \leq d} f(x_1; \mu_1) f(x_2; \mu_2) dx_1 dx_2.$$

Зіткнення – рідкісна подія, тому використання прямого методу Монте-Карло неефективне, що зазначено в праці [3].

Отже, застосовуємо так звану методику істотних вибірок.

Позначимо

$$\rho(x; \mu, a, b) \stackrel{df}{=} \frac{1}{2ab\Gamma(b)} e^{-\left|\frac{x-\mu}{a}\right|^{1/b}}, \quad x \in \mathfrak{R}$$

де $a > 0, b > 0, \mu \in \mathfrak{R}$.

При $0 < \alpha < 1$ вираз (1) набуває вигляду

$$f(x, \mu) = (1 - \alpha)\rho(x; \mu, a_1, b_1) + \alpha\rho(x; \mu, a_2, b_2), \quad x \in \mathfrak{R}.$$

Дисперсія цього розподілу дорівнює [3]:

$$\sigma^2 = (1 - \alpha) \frac{a_1^2 \Gamma(3b_1)}{\Gamma(b_1)} + \alpha \frac{a_2^2 \Gamma(3b_2)}{\Gamma(b_2)}. \quad (2)$$

При $b_1 = \frac{1}{2}$ $\rho\left(x; \mu, a_1, \frac{1}{2}\right)$ – це щільність

нормального розподілу. Вважатимемо, що $b_2 > b_1$. Це означає, що у другого доданка щільності $f(x, \mu)$ більш важкі “хвости”.

Щільність

$$f_X(x_1, x_2) \stackrel{df}{=} f(x_1; \mu_1) f(x_2; \mu_2), \quad x_1, x_2 \in \mathfrak{R}, \mu_1 \neq \mu_2.$$

Ймовірність зіткнення по координаті x :

$$P_x \stackrel{df}{=} P\{|X_1 - X_2| \leq d\},$$

де d – ефективний діаметр літака; X_1, X_2 – незалежні координати:

$$X_1 \sim f(x_1; \mu_1), \quad X_2 \sim f(x_2; \mu_2).$$

Нехай $g_{X_i}(x_i)$ – щільність розподілу $N(\mu_i, \sigma^2)$ [1], де σ^2 задане у виразі (2),

$$g_X(x_1, x_2) \stackrel{df}{=} g_{X_1}(x_1) g_{X_2}(x_2);$$

$$\hat{f}_X(x_1, x_2) \stackrel{df}{=} \frac{g_{X_1}(x_1) g_{X_2}(x_2) I(|x_1 - x_2| \leq d)}{\Phi\left(\frac{\mu_1 - \mu_2 + d}{\sigma\sqrt{2}}\right) - \Phi\left(\frac{\mu_1 - \mu_2 - d}{\sigma\sqrt{2}}\right)},$$

а знаменник цього дробу \hat{P}_x .

Статистика Y_n для P_x дорівнює:

$$\hat{f}_X(x_1, x_2) \stackrel{df}{=} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{f_X(\hat{x}^{(i)})}{\hat{f}_X(\hat{x}^{(i)})},$$

де $\hat{x}^{(i)} = (\hat{x}_1^{(i)}, \hat{x}_2^{(i)})$, $i = 1, 2, \dots$ – незалежна вибірка, сформована по щільності $\hat{f}_X(x_1, x_2)$.

Тоді $EY_n = P_x$,

$$Y_n - P_x = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[\frac{f_X(\hat{x}^{(i)})}{\hat{f}_X(\hat{x}^{(i)})} - P_x \right].$$

Нехай $\lambda > 0$, тому оцінка ймовірності події:

$$A_{\lambda n} \stackrel{df}{=} \left\{ \frac{|Y_n - P_x|}{P_x} \geq \lambda \right\}. \quad (3)$$

Ймовірність (3) повинна задовольняти умову

$$P(A_{\lambda n}) < \alpha,$$

де α – рівень довіри, що зазвичай дорівнює 0,05.

Визначення оптимальної вибірки

Вибираємо оптимальний об'єм допоміжної вибірки n для кожної координати окремо так, щоб виконувалась умова:

$$P\{|Y_n - P_x| \leq \lambda P_x\} \geq 1 - \beta,$$

де λ – гранична відносна точність оцінки $\lambda > 0, \lambda < 1$; $1 - \beta$ – довірча ймовірність; $0 < \beta < 1$; тут $\lambda = 0,8, \beta = 0,1$.

Також існує апіорна нерівність $P_x \geq \pi_x$, тобто відома нижня межа $\pi_x > 0$ для P_x :

$$\pi_x = \frac{1}{2} \min(Y_n, 50 \leq n \leq 100) = 2,06 \times 10^{-8}.$$

де Y_n – статистика для P_x при $n = 50, \dots, 100$.

Шляхом математичних викладок отримуємо:

$$n \geq N_1 = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0,8} = 1,25;$$

$$n \geq N_2 = \frac{1}{\lambda \pi_x} \left[-A + \exp \left\{ \left(\ln \left(\frac{2(1+e)M_g}{\lambda \beta \pi_x} \right) \right)^{\frac{1}{\alpha}} \right\} \right] = 3,37471,$$

де $\bar{\alpha}=0,99$, $A=1,442$, $M_g=3,207425E-10$;

$$n \geq N_3 \stackrel{df}{=} \frac{1}{\lambda} \left[-A + \exp \left(\left(\ln \left(\frac{2eg_0(P_x)}{\lambda\beta} \right) \right)^{\frac{1}{\alpha}} \right) \right] = 109,4531.$$

Остаточню

$$n \geq N \stackrel{df}{=} \max(N_1, N_2, N_3);$$

$$n = \max(1,25, 3,37471, 109,4531) \approx 109.$$

Моделювання ймовірності катастрофічної ситуації при вибраній оптимальній вибірці

Розглянемо результати дослідження ймовірності катастрофи при змінюванні вихідних параметрів розподілу (1) $\alpha, b_1, b_2, \mu_{2x}$, де μ_{2x} – відповідає осі повітряного коридору по висоті.

Рис. 1 і 2 ілюструють залежності теоретичної P_n й експериментальної Y_n ймовірності катастрофи, а також відносної похибки $|P_n - Y_n|/P_n$ від вибірки n на основі двох нормальних законів.

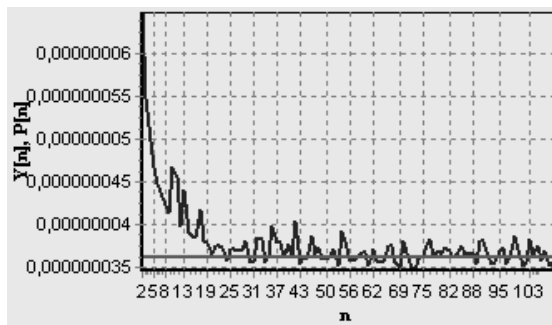


Рис. 1. Залежність ймовірності катастрофічної ситуації від вибірки:

— ймовірність катастрофи $Y[n]$; — теоретична ймовірність катастрофи $P[n]$

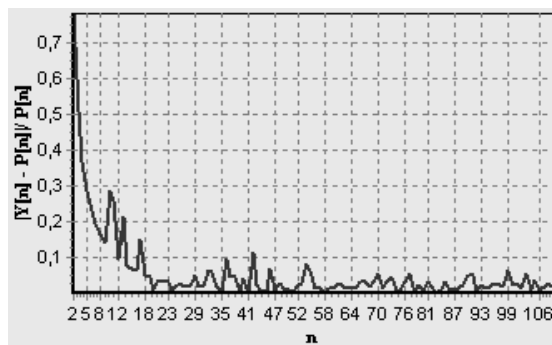


Рис. 2. Залежність відносної похибки від вибірки

Теоретична ймовірність катастрофи $P_n = 3,6294 \times 10^{-8}$.

У табл. 1 наведені числові значення експериментальної ймовірності катастрофи зі змінюваним параметром $\alpha=0$, що відповідає нормальному закону.

У табл. 2 наведено числові значення відносної похибки $|P_n - Y_n|/P_n$ від вибірки n .

Дослідимо поведінку експериментальної ймовірності катастрофи Y_n ($n=109$) при змінюванні параметра α на інтервалі $[0 \dots 1/4]$.

Залежність ймовірності катастрофи Y_n ($n=109$) від α зображено на рис. 3.

Таблиця 1

Експериментальна ймовірність катастрофи

n	$Y_n \times 10^{-8}$
2	6,46902478251832
10	4,67535556936127
20	3,65909720301261
30	3,56866358686148
40	3,77852238386822
50	3,59915048875337
60	3,67887658114796
70	3,82123026554382
80	3,66246375449464
90	3,81173244079491
100	3,71873163373948
109	3,56846854288051

Таблиця 2

Відносна похибка

n	$ P_n - Y_n /P_n$
2	0,78237849473953200
10	0,28817766904830900
20	0,00817300565540791
30	0,01674372330307960
40	0,04107763618230820
50	0,00834381673485041
60	0,01362271979451180
70	0,05284472927451130
80	0,00910057500004768
90	0,05022783949971200
100	0,02460378594696520
109	0,01679746247828010

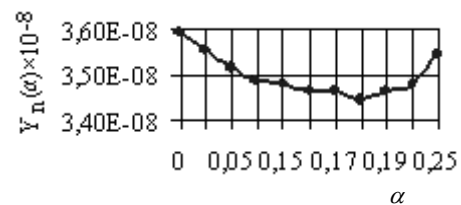


Рис. 3. Залежність ймовірності катастрофічної ситуації від параметра α

У табл. 3 наведено числові значення ймовірності катастрофи Y_n ($n=109$), що змінюються залежно від рівня довіри α .

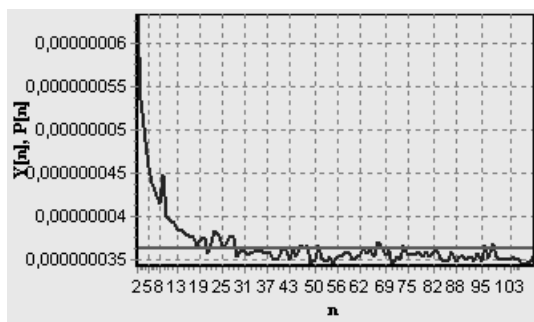
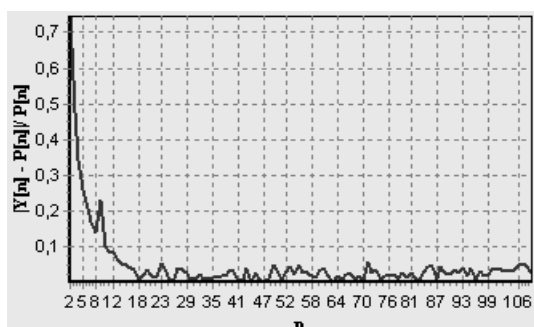
З рис. 3 та табл. 3 видно, що найменшого значення експериментальна ймовірність катастрофи Y_n ($n=109$) набуває при $\alpha=0,18$.

Таблиця 3

Імовірність катастрофи $Y_n(n=109)$

α	$Y_n \times 10^{-8}$
0	3,56846854288051
0,0136	3,55578713140403
0,05	3,51860798275538
0,1	3,48950202067044
0,15	3,48081066192663
0,16	3,46475275136982
0,17	3,46446107357679
0,18	3,44743114055746
0,19	3,46398856265751
0,2	3,47842004089216
0,25	3,54609106523185

Рис. 4 і 5 ілюструють залежності теоретичної P_n й експериментальної Y_n ймовірності катастрофи, а також відносної похибки $|P_n - Y_n|/P_n$ від вибірки n при $\alpha = 0,18$.

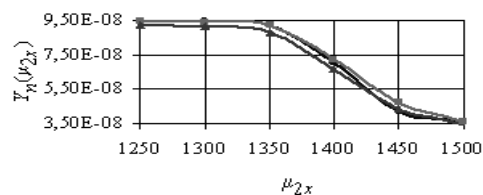
Рис. 4. Залежність імовірності катастрофічної ситуації від вибірки при $\alpha = 0,18$ Рис. 5. Залежність відносної похибки від вибірки при $\alpha = 0,18$

У табл. 4 наведено числові значення експериментальної ймовірності катастрофи зі змінюваним параметром $\alpha = 0,18$.

У табл. 5 наведено числові значення відносної похибки $|P_n - Y_n|/P_n$ від вибірки n при $\alpha = 0,18$.

Дослідимо поведінку експериментальної ймовірності катастрофи $Y_n(n=109)$, змінюючи параметр μ_{2x} на інтервалі $[1250...1500]$ при $\alpha = (0; 0,0136; 0,18)$.

Залежність імовірності катастрофи $Y_n(n=109)$ від μ_{2x} показано на рис. 6.

Рис. 6. Залежність імовірності катастрофічної ситуації від параметра μ_{2x} :

— $Y_n(\mu_{2x}) \alpha=0$; — $Y_n(\mu_{2x}) \alpha=0,0136$; — $Y_n(\mu_{2x}) \alpha=0,18$

У табл. 6 наведено числові значення ймовірності катастрофи $Y_n(n=109)$ від μ_{2x} при $\alpha = (0; 0,0136; 0,18)$.

Досліджувати поведінку експериментальної ймовірності катастрофи $Y_n(n=109)$ при змінюванні параметрів μ_{2y} та μ_{2z} не є доцільним, тому що межі коридору по горизонталі та вздовж осі невеликі, порівняно з межами по висоті.

Таблиця 4

Експериментальна ймовірність катастрофи при $\alpha = 0,18$

n	$Y_n \times 10^{-8}$
2	6,33485797152389
10	5,35904298715195
20	4,87113531733030
30	4,57839064438303
40	4,38322835805138
50	4,24382520236577
60	4,13927381259782
70	4,47136301318096
80	3,99290129848850
90	3,93967596323819
100	3,93046803992547
109	3,44743114055746

Таблиця 5

Відносна похибка при $\alpha = 0,18$

n	$ P_n - Y_n /P_n$
2	0,74541217088699
10	0,47655066847801
20	0,34211990237236
30	0,26146140694618
40	0,20768928527832
50	0,16928023099899
60	0,14047369360924
70	0,23197260499001
80	0,10014440119267
90	0,08547949045897
100	0,08294247090817
109	0,06291750818491

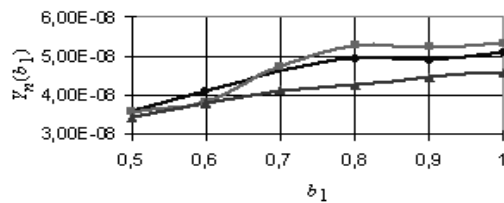
Таблиця 6

Імовірність катастрофи $Y_n(\mu_{2x})$, $n = 109$

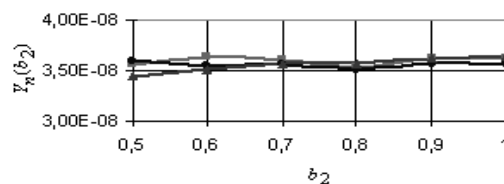
μ_{2x}	$Y_n(\mu_{2x}) \times 10^{-8}$		
	$\alpha=0$	$\alpha=0,0136$	$\alpha=0,18$
1250	9,45848981	9,44354213	9,18707812
1300	9,41214111	9,39268148	9,13650524
1350	9,18039831	9,20761352	8,80515074
1400	7,04837788	7,24742577	6,67858941
1450	4,22107682	4,69240184	4,31416325
1500	3,56846854	3,55578713	3,44743114

Розглянемо поведінку експериментальної ймовірності катастрофи $Y_n(n=109)$ при змінюванні параметрів b_1 та b_2 .

Залежність ймовірності катастрофи $Y_n(n=109)$ від b_1 та b_2 ілюструють рис. 7 і 8.

Рис. 7. Залежність ймовірності катастрофічної ситуації від параметра b_1 :

— $Y_n(\mu_{2x}) \alpha=0$; — $Y_n(\mu_{2x}) \alpha=0,0136$; — $Y_n(\mu_{2x}) \alpha=0,18$

Рис. 8. Залежність ймовірності катастрофічної ситуації від параметра b_2 :

— $Y_n(\mu_{2x}) \alpha=0$; — $Y_n(\mu_{2x}) \alpha=0,0136$; — $Y_n(\mu_{2x}) \alpha=0,18$

Числові значення ймовірності катастрофи $Y_n(n=109)$ від b_1 та b_2 для параметра $\alpha = (0; 0,0136; 0,18)$ наведено в табл. 7 і 8.

З рис. 7 і 8 та табл. 7 і 8 видно, що найменших значень експериментальна ймовірність катастрофи $Y_n(n=109)$ набуває при $\alpha = 0,18$.

Таблиця 7

Імовірність катастрофи $Y_n(b_1)$, $n = 109$

b_1	$Y_n(b_1) \times 10^{-8}$		
	$\alpha=0$	$\alpha=0,0136$	$\alpha=0,18$
0,5	3,56846854	3,55578713	3,44743114
0,6	4,10432826	3,84526189	3,78776939
0,7	4,63424357	4,73694790	4,14740811
0,8	4,91695715	5,25223705	4,28294982
0,9	4,89205867	5,24395710	4,46548611
1	5,10593985	5,34901545	4,55854057

Таблиця 8

Імовірність катастрофи $Y_n(b_2)$, $n = 109$

b_2	$Y_n(b_2) \times 10^{-8}$		
	$\alpha=0$	$\alpha=0,0136$	$\alpha=0,18$
0,5	3,56846854	3,55578713	3,44743114
0,6	3,54664209	3,63175197	3,51079308
0,7	3,55476786	3,59957433	3,56578127
0,8	3,50864688	3,53230725	3,57236125
0,9	3,57227243	3,62248898	3,61313575
1	3,55476750	3,62244243	3,63483110

Висновки

Вибір оптимального обсягу допоміжної вибірки дозволяє уточнити результати моделювання ймовірності катастрофи, які показують, що змінювання параметрів основного розподілу веде до більш ефективних результатів при оцінці ймовірності катастрофічної ситуації, та дають можливість запропонувати заходи для її мінімізації.

Список літератури

1. Kharchenko V.P., Kukush A.G., Znakovskaya E.A. Modelling of aircrafts collision using Importance Sampling Technique// Proceedings of the NAU. – 2003. – №2. – С. 27 – 30.
2. Грунна експертів по рассмотрению общей концепции эшелонирования. Шестое совещание. Доклад. Т. 1.2. – Монреаль, 1988.
3. Geist R.M., Smotherman M.K. Ultrahigh reliability estimates through simulation// Proceeding annual reliability and maintainability symposium. 1989. – P. 350–355.

Стаття надійшла до редакції 07.12.04.

В.П. Бабак, В.П. Харченко, Е.А. Знаковская

Исследование вероятности катастрофической ситуации методом моделирования редких событий при оптимальной выборке

Исследована вероятность катастрофы, оцененная методом моделирования редких событий при оптимальной вспомогательной выборке путем изменения исходных параметров распределения.

V.P. Babak, V.P. Kharchenko, E. A. Znakovskaya

Research of collision probability behaviour the appreciated behind a method of the rare events modelling at optimum sample.

The collision probability behaviour the researched behind a method of the rare events modelling at optimum subsidiary sample by change of distribution parameters is resulted.